

Zur Herleitung der Breit-Wigner-Formel¹

Von S. FLÜGGE

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Königsberg

(Z. Naturforsch. **1**, 121–124 [1946]; aus Göttingen eingegangen am 31. Oktober 1945)

Bekanntlich wird der Einfangquerschnitt eines Atomkerns für langsame Neutronen durch die von Breit und Wigner zuerst abgeleitete Formel beschrieben:

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{\Gamma_s \Gamma}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2},$$

worin E und λ Energie und Wellenlänge der einfallenden Neutronen, die anderen Größen charakteristische Konstanten des Atomkerns bedeuten, nämlich E_r die Resonanzenergie, Γ die Breite des Resonanzniveaus („Strahlungsbreite“) und Γ_s die sog. „Streubreite“ der Niveaus. Letztere ist proportional zur Neutronengeschwindigkeit v , während $\Gamma_s \ll \Gamma$ und E_r unabhängig davon sind. Man kann daher auch in einer von den Experimentalphysikern meist vorgezogenen Weise schreiben

$$\sigma = V \sqrt{\frac{E_r}{E}} \cdot \frac{\sigma_r \Gamma^2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2};$$

dabei ist also dann der „Resonanzquerschnitt“

$$\sigma_r = \frac{\lambda_r^2}{\pi} \frac{\Gamma_s(E_r)}{\Gamma}.$$

Diese sog. Breit-Wigner-Formel bildet die Grundlage einer großen Zahl theoretischer und experimenteller Untersuchungen der Kernphysik. Analogiebetrachtungen zur Dispersionstheorie des Lichtes machen zum mindesten die Form des Resonanznenners sehr anschaulich, so daß das Bedürfnis, die Herleitung zu kennen, sehr gering ist, weil jeder sie im Grunde für evident hält. Man kann sie daher als Musterbeispiel einer Formel der theoretischen Physik ansprechen, die gern geglaubt, aber selten verstanden wird.

In der Literatur existieren zwei Herleitungen der Formel, nämlich die ursprünglich von Breit und Wigner² auf Grund der Diracschen Methode der zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden, und eine später von Bethe³ mit

¹ Eingereicht bei den Annalen der Physik im Juni 1944.

² Physic. Rev. **49**, 519 [1936].

stationären Eigenfunktionen durchgeführte. Die Bethesche Herleitung bezweckt die Angabe eines möglichst allgemeinen Ausdrucks, der für alle Wirkungsquerschnittprobleme der Kernphysik anwendbar ist. Sie ist dadurch sehr stark mit Ballast beladen, der zum grundsätzlichen Verständnis des Problems nicht erforderlich ist. Auch scheint dem Verf. die stationäre Methode unanschaulicher als die Dirac-Methode, obwohl die Meinungen hierüber — wie Diskussionen gezeigt haben — auseinandergehen. Was nun die Dirac-Methode betrifft, so ist in der Arbeit von Breit und Wigner ein ursprünglich von Wigner und Weißkopf⁴ in der Strahlungstheorie benutztes Näherungsverfahren zugrundegelegt; darüber hinaus ist aber noch eine Erweiterung eingetreten, die zwar richtig ist, aber bei der doch so schwer zu sehen ist, wie man eigentlich dazu kommt und in welchem Umfang sie eine Näherung darstellt, daß dieser Weg nicht nur vom Verf. als unbefriedigend empfunden wurde, so bewundernswert es ohne Zweifel ist, daß die Autoren ihn gefunden haben und auf ihm zum Ziel gelangt sind.

Der Verf. hat nun im Anschluß an längere Diskussionen mit den Herren R. Becker in Göttingen und H. Jensen in Hannover versucht, ebenfalls nach der Dirac-Methode eine Ableitung der Breit-Wigner-Formel durchzuführen, die man als systematischen Weg betrachten kann. Er hofft dadurch nicht nur das Verständnis dieser Formel einem größeren Kreise näher zu bringen, sondern darüber hinaus auch die Behandlung ähnlicher Probleme zu erleichtern.

Es sei H der Hamilton-Operator des Gesamtsystems und u_0, u_1, u_2 usw. Eigenfunktionen dieses Operators zu den Eigenwerten E_0, E_1, E_2 usw., so daß also die Gleichungen gelten

$$H u_0 = E_0 \cdot u_0; H u_1 = E_1 \cdot u_1; \dots H u_n = E_n \cdot u_n. \quad (1)$$

³ Rev. Mod. Physics **9**, 69, insbesondere § 55, S. 101 ff. [1937].

⁴ Z. Physik **63**, 54 [1930].



Unter diesen Eigenlösungen befindet sich *eine*, welche den Anfangszustand des Systems beschreibt, bei der sich also ein Teilchen außerhalb des Kerns aufhält. Dies sei die Funktion u_0 ; die Energie möge so normiert sein, daß E_0 die kinetische Energie des hervorgehobenen Teilchens ist und der Energieinhalt des Kerns im Grundzustand $= 0$ ist. Ferner sei u_1 , E_1 eine Lösung, die einem hochangeregten Zustand des Systems entspricht. Wir bezeichnen sie im folgenden als den Zwischenzustand (Bohrs „compound nucleus“). Alle übrigen Zustände u_n des Systems seien durch den Laufindex n oder m numeriert ($n, m = 2, 3, 4 \dots$).

Ein beliebiger nicht stationärer Zustand des Systems läßt sich aus den stationären Lösungen aufbauen:

$$\psi = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n u_n \quad (2)$$

mit zeitabhängigen Koeffizienten a_k ($k = 0, 1, 2 \dots$). Die Funktion ψ muß der Schrödinger-Gleichung genügen

$$H \psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3)$$

Setzen wir noch — lediglich aus Zweckmäßigkeitsgründen — formal

$$a_k(t) = \alpha_k(t) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_k t \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad (4)$$

und gehen mit dem Ansatz (2) in die Schrödinger-Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_k \alpha_k \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_k t \right) H u_k &= \\ = \sum_k \left(-\frac{\hbar}{i} \dot{\alpha}_k + E_k \alpha_k \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_k t \right) u_k. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit einem u_l^* und Integration über die Ortskoordinaten sämtlicher Teilchen entstehen auf der linken Seite die Matrixelemente der Energiematrix

$$H_{kl} = \int d\tau u_l^* H u_k \quad (5)$$

mit den Diagonalgliedern

$$H_{ll} = E_l \quad (6)$$

Auf der rechten Seite verschwinden wegen der Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen

$$\int d\tau u_l^* u_k = \delta_{kl} \quad (7)$$

alle Glieder bis auf eines. Infolgedessen entstehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_k \alpha_k \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_k t \right) H_{lk} &= \\ = \left(-\frac{\hbar}{i} \dot{\alpha}_l + E_l \alpha_l \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_l t \right) \end{aligned}$$

oder

$$\dot{\alpha}_l = -\frac{i}{\hbar} \sum_k H_{kl} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_k - E_l) t \right] \alpha_k \quad (8)$$

($l = 0, 1, 2, 3 \dots$)

Der Strich am Summenzeichen bedeutet hierbei, daß der Term $k = l$ auszulassen ist.

Wir wollen nun über die Energiematrix folgende spezielle Voraussetzungen einführen, die dem physikalischen Problem angepaßt sind: Vom Anfangszustand u_0 soll nur zum Zwischenzustand u_1 ein Übergang möglich sein, aber nicht zu den übrigen Zuständen des Systems:

$$H_{01} \neq 0; \quad H_{0n} = 0 \quad (n = 2, 3, 4 \dots) \quad (9a)$$

Ferner existieren Übergangsmöglichkeiten vom Zwischenzustand u_1 zu allen u_n , die somit sämtlich mögliche Endzustände sind:

$$H_{1n} \neq 0 \quad (9b)$$

Dagegen wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß die u_n nicht untereinander kombinieren können

$$H_{nm} = 0 \quad (n \neq m = 2, 3, 4 \dots) \quad (9c)$$

Die Gleichungen (8) nehmen dann mit $l = 0, l = 1, l = n$ der Reihe nach die Form an

$$\dot{\alpha}_0 = -\frac{i}{\hbar} H_{10} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0) t \right] \alpha_1 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 = & -\frac{i}{\hbar} \left\{ H_{01} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) t \right] \alpha_0 + \right. \\ & \left. + \sum_n H_{1n} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_n - E_1) t \right] \alpha_n \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\dot{\alpha}_n = -\frac{i}{\hbar} H_{1n} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_n) t \right] \alpha_1 \quad (12)$$

Dies Gleichungssystem haben wir zu lösen für die Anfangsbedingungen $|\alpha_0| = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_n = 0$ zur Zeit $t = 0$.

Wir verfahren nun folgendermaßen. Aus Gl. (10) entnehmen wir

$$\alpha_1 = -\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{1}{H_{10}} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) t \right] \dot{\alpha}_0 \quad (13)$$

woraus durch Differenzieren folgt

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 = & -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{H_{10}} \left[\ddot{\alpha}_0 - \frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) \dot{\alpha}_0 \right] \\ & \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) t \right] \quad (14) \end{aligned}$$

Mit dem Ausdruck für α_1 gehen wir in (12) ein. Gl. (12) ergibt dann durch formale Integration nach der Zeit

$$\alpha_n = \frac{H_{1n}}{H_{10}} \int_0^t dt \dot{\alpha}_0(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_n) t \right] \quad (15)$$

Setzen wir ferner $\dot{\alpha}_1$ nach (14) und das eben gewonnene α_n nach (15) in Gl. (11) ein, so geht diese in eine Gleichung für α_0 allein über, nämlich

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_0 - \frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) \dot{\alpha}_0 + \frac{1}{\hbar^2} |H_{01}|^2 \alpha_0 = \\ = - \frac{1}{\hbar^2} \sum_n |H_{1n}|^2 \exp \left[- \frac{i}{\hbar} (E_n - E_0) t \right] \\ \int_0^t dt \dot{\alpha}_0 \exp \left[- \frac{i}{\hbar} (E_0 - E_n) t \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Hierbei ist noch davon Gebrauch gemacht, daß $H_{n1} = H_{1n}^*$, $H_{10} = H_{01}^*$ ist.

Gl. (16) lösen wir durch den Ansatz

$$\alpha_0(t) = \exp(-\gamma t), \quad (17)$$

der die Anfangsbedingung $|\alpha_0(t)| = 1$ befriedigt und physikalisch vernünftig ist, sofern sich beim Einsetzen in (16) ein positiver Realteil von γ ergibt. Die Differentiationen und Integrationen in Gl. (16) lassen sich dann ausführen, und es entsteht

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) \gamma + \frac{1}{\hbar^2} |H_{01}|^2 = \\ = - \frac{i\gamma}{\hbar} \sum_n |H_{1n}|^2 \frac{1 - \exp \left[- \frac{i}{\hbar} (E_n - E_0 + i\hbar\gamma) t \right]}{E_n - E_0 + i\hbar\gamma}. \end{aligned} \quad (18)$$

Da auf der rechten Seite t noch vorkommt, hat es zunächst den Anschein, als ob der Ansatz (17) die Gl. (16) nicht befriedigt. Nun kann man aber im Anschluß an Dirac oder an Wigner und Weißkopf die Summe in (18) durch ein Integral ersetzen:

$$\begin{aligned} \sum_n |H_{1n}|^2 \frac{1 - \exp \left[- \frac{i}{\hbar} (E_n - E_0 + i\hbar\gamma) t \right]}{E_n - E_0 + i\hbar\gamma} = \\ = \int \frac{dE_n}{\Delta E_n} |H_{1n}|^2 \frac{1 - \exp \left[- \frac{i}{\hbar} (E_n - E_0 + i\hbar\gamma) t \right]}{E_n - E_0 + i\hbar\gamma}. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet ΔE_n den Abstand zweier benachbarter Energieniveaus E_n . Die Integration führt auf

$$\frac{|H_{1n}|^2}{\Delta E_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x + i\alpha} \left\{ 1 - \exp \left[- (x + i\alpha) \right] \right\} = \frac{|H_{1n}|^2}{\Delta E_n} i\pi.$$

Allerdings ist bei dieser Substitution einige Vorsicht am Platze. Als Endzustände u_n treten nämlich sowohl solche auf, bei denen ein Teilchen wieder frei ist, als auch solche, bei denen alle Teilchen gebunden bleiben. Im ersten Falle sprechen wir von Streuung, im zweiten von Einfang. Für jede der beiden Gruppen von Endzuständen läßt sich die

Zusammenfassung der zugehörigen Summenglieder in ein Integral durchführen; es erscheint also auf der rechten Seite von Gl. (18) sowohl die Größe

$$\left(\frac{\pi |H_{1n}|^2}{\hbar \Delta E_n} \right)_s = 2p_s, \quad (19a)$$

bei der die u_n im Sinne der Streuung gemeint sind, als auch

$$\left(\frac{\pi |H_{1n}|^2}{\hbar \Delta E_n} \right)_e = 2p_e, \quad (19b)$$

wo die u_n einem Einfang entsprechen. Sie bedeuten dann im Sinne der Strahlungstheorie Lösungen, die im allgemeinen nur *einem* Zustand der materiellen Teilchen (z. B. Grundzustand des Kerns), aber verschiedenen Besetzungszahlen des Feldes mit Lichtquanten entsprechen. Im Falle der Streuung liegen also die Teilchenniveaus, im Falle des Einfangs die Lichtquantenniveaus dicht, so daß die Ersetzung der Summe durch Integrale erlaubt ist.

Daher geht Gl. (18) über in

$$\gamma^2 + \frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) \gamma + \frac{1}{\hbar^2} |H_{01}|^2 = 2(p_s + p_e) \gamma.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung haben wir γ zu entnehmen.

Zur Abkürzung wollen wir noch setzen

$$\frac{E_0 - E_1}{\hbar} = 2\omega; \quad p = p_s + p_e; \quad \frac{1}{\hbar^2} |H_{01}|^2 = q^2. \quad (20)$$

Dann hat die quadratische Gleichung

$$\gamma^2 + 2i\omega\gamma + q^2 = 2p\gamma$$

die Lösung

$$\gamma = p - i\omega \pm \sqrt{(p - i\omega)^2 - q^2}. \quad (21)$$

Hinsichtlich des Vorzeichens der Wurzel sieht man sofort, daß nur das Minuszeichen physikalisch sinnvoll ist. Wäre nämlich $H_{01} = 0$, also $q = 0$, so könnte ja der Anfangszustand u_0 auf keine Weise verschwinden, und es müßte $\text{Re } \gamma = 0$ werden. Dies ist aber nur für das Minuszeichen erfüllt, während das Pluszeichen auf $\text{Re } \gamma = 2p$ führt. Wir werden ferner weiter unten sehen, daß immer $q \ll p$ ist. Wir können daher die Wurzel entwickeln:

$$\begin{aligned} \gamma &= (p - i\omega) \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{p - i\omega} \right)^2} \right\} = \\ &= \frac{q^2}{2(p - i\omega)} = \frac{q^2(p + i\omega)}{2(p^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Die für die Dämpfung des Anfangszustandes maßgebende Größe

$$z = 2 \text{Re } \gamma,$$

bei deren Einführung $|a|^2 = e^{-z^2}$ wird, ergibt sich also zu

$$z = \frac{q^2 p}{p^2 + \omega^2}, \quad (22)$$

oder unter Einführung von

$$\begin{aligned} \Gamma_s &= 2 \hbar p_s = \left(\frac{\pi |\overline{H_{1n}}|^2}{\Delta E_n} \right)_s; \\ \Gamma_e &= 2 \hbar p_e = \left(\frac{\pi \cdot |\overline{H_{1n}}|^2}{\Delta E_n} \right)_e; \quad \Gamma = \Gamma_e + \Gamma_s \end{aligned} \quad (23)$$

und Ersetzung von ω nach (20):

$$z = \frac{2 (\hbar q^2) \Gamma}{(E_0 - E_1)^2 + \Gamma^2}. \quad (24)$$

Es sei nun der Anfangszustand dadurch beschrieben, daß das hervorgehobene Teilchen in ein gegen die Kernabmessungen sehr großes Normierungsvolumen V eingeschlossen ist und in großer Entfernung vom Kern die Geschwindigkeit v_0 besitzt. Dann hängt der Wirkungsquerschnitt des Kerns für das freie Teilchen mit der Dämpfungskonstanten κ des Anfangszustandes zusammen nach der Formel

$$\sigma = \frac{V}{v_0} \kappa,$$

so daß wir zu folgender Schlußformel kommen

$$\sigma = \frac{2 |\overline{H_{01}}|^2 V}{\hbar v_0} \cdot \frac{\Gamma}{(E_0 - E_1)^2 + \Gamma^2}. \quad (25)$$

Sie zeigt den typischen Resonanznenner der Formel von Breit und Wigner mit der durch Gl. (23) definierten Dämpfungskonstante Γ .

Wir wollen den ersten Faktor in (25) noch etwas umformen. Aus Gl. (23) entnehmen wir

$$\Gamma_s = \frac{\pi |\overline{H_{10}}|^2}{\Delta E_0}; \quad (26)$$

denn im Falle der Streuung sind die Funktionen u_n ja vom gleichen Typ wie u_0 . Da dann

$$\Delta E_0 = \frac{\hbar^3 dE}{4 \pi p^2 dp V \cdot g} = \frac{2 \pi^2}{g} \frac{\hbar^3}{V m^3 v_0} \quad (27)$$

wird ($g=2$ für Elementarteilchen ist das statistische Gewicht), ergibt sich statt (25):

$$\sigma = \frac{4 \pi}{g} \left(\frac{\hbar}{m v_0} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma_s \Gamma}{(E_0 - E_1)^2 + \Gamma^2}.$$

Hierin kann man noch die de-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{2 \pi \hbar}{m v_0}$$

einführen und den Gesamtquerschnitt σ in Streuquerschnitt σ_s und Einfangquerschnitt σ_e aufspalten; dann erhält man die Formeln von Breit und Wigner:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\lambda_0^2}{\pi g} \frac{\Gamma_s \Gamma_s}{(E_0 - E_1)^2 + (\Gamma_s + \Gamma_e)^2} \\ \sigma_e &= \frac{\lambda_0^2}{\pi g} \frac{\Gamma_s \Gamma_e}{(E_0 - E_1)^2 + (\Gamma_s + \Gamma_e)^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Darin bedeutet nach (26) und (27)

$$\Gamma_s = g \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{\lambda_0} V |\overline{H_{10}}|^2. \quad (29)$$

Da infolge der Normierungsbedingung (7) die Eigenfunktion u_0 zu $1/\sqrt{V}$ proportional ist, wird dieser Ausdruck unabhängig vom Normierungsvolumen. Er ist ferner umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ_0 oder direkt proportional zur Geschwindigkeit v_0 des ankommenden Teilchens. Demgegenüber ist

$$\Gamma_e = \frac{\pi |\overline{H_{1n}}|^2}{\Delta E_n}, \quad (30)$$

wobei sich der Index n auf solche Zustände des Systems bezieht, in welchen alle Teilchen gebunden sind. Er hängt daher praktisch nicht von der Energie ab.

Endlich können wir jetzt noch die Voraussetzung $q \ll p$ prüfen, die wir bei der Entwicklung der Wurzel (21) gemacht haben. Nach Gl. (20) wird $q^2 \sim 1/V$, während beide p 's ebenso wie die Γ 's von V unabhängig sind. Mit wachsendem Normierungsvolumen V wird daher q beliebig klein, so daß die Entwicklung streng gilt. Nach Gl. (22) oder (24) wird dann natürlich auch die Dämpfungskonstante $\kappa = 0$; und in der Tat ist es ja beliebig unwahrscheinlich, daß ein Teilchen den Kern trifft, wenn ihm ein unendlich großes Volumen zur Verfügung steht. Eine Größe, die unabhängig vom Normierungsvolumen ist, ist eben nicht κ , sondern der Wirkungsquerschnitt $\sigma = \frac{V}{v_0} \kappa$. Er wird also proportional zu $q^2 V$, und diese Größe bleibt endlich.